# LÁNCTÖRTEK

Az euklideszi algoritmust, ha alkalmazzuk valamely $a,b \in Z \oplus Z, b \neq 0$ szám párra, akkor az létrehozza a hányadosok $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ és a maradékok $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ sorozatát. Legyen példának okául $a,b = 62,23$. Az euklideszi algoritmust végre hajtva adódik, hogy: $\begin{matrix} 62 = 2 \cdot 23 + 16 \\ 23 = 1 \cdot 16 + 7 \\ 16 = 2 \cdot 7 + 2 \\ 7 = 3 \cdot 2 + 1 \end{matrix}$. Ezeket az azonosságokat osszuk el rendre a bennük szereplő, hányadosokkal. Azaz az i. azonosságot $q_i$ -vel osztva, adódik, hogy $\begin{matrix} \frac{62}{23} = 2 + \frac{16}{23} = 2 + \frac{1}{\frac{23}{16}}, \\ \frac{23}{16} = 1 \cdot + \frac{7}{16} = 1 \cdot + \frac{1}{\frac{16}{7}}, \\ \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}, \\ \frac{7}{3} = 3 + \frac{1}{2} \end{matrix}$. E sorok felhasználásával megkapjuk

$$\frac{62}{23} = 2 + \frac{16}{23} = 2 + \frac{1}{\frac{23}{16}} = \; = 2 + \frac{1}{\frac{23}{16}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{7}{16}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{1}{\frac{16}{7}}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

racionális szám

lánctörtbe fejtését. A konkrét példával teljesen analóg módon látható, hogy ha az $a,b \in Z \oplus Z, b \neq 0,\; a,b = 1$ számpárra alkalmazzuk az euklideszi algoritmust, akkor az $\frac{a}{b}$ racionális számot a létre jött hányadosok $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$ sorozatával az $\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{\ldots. + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}}}$ alakba írhatjuk.

**Definíció:** A



+

$$C_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{}{\dots + \cfrac{}{\dots + \cfrac{}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}}} \qquad (1)$$

(1)-törtet **<u>véges lánctörtnek</u>** nevezzük, ahol az $a_0 \in R$ tetszőleges valós szám és az $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in R_+$ pozitív valós számok. Az egyszerűbb íráskép kedvéért gyakran (1)-t $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ alakba írjuk.

A

$$C_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{}{\dots + \cfrac{}{\dots + \cfrac{}{\dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}}} \qquad (1)$$

(1)-törtet véges **<u>egyszerű lánctörtnek</u>** nevezzük, ahol az $a_0 \in R$ tetszőleges valós szám és az $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in Z_+$ tetszőleges pozitív egész számok. Az egyszerűbb íráskép kedvéért gyakran (1)-t $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ alakba írjuk.

Az $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ formulában szereplő $[\ ]$ szimbólum, szögletes zárójel utal arra, hogy lánctörtről van szó. S reméljük, hogy a Kedves Olvasó a szöveg környezet alapján el tudja dönteni, hogy adott esetben az $[a_0]$ formula az $a_0$-t illetve annak az egész részét jelöli. Elemi számolás mutatja, hogy $C_0 = a_0,\ C_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, C_2 = [a_0, a_1, a_2] = \left[a_0, a_1 + \dfrac{1}{a_2}\right] = \dfrac{a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1},$ továbbá az is igaz, hogy $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = \left[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}\right]$ illetve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = a_0 + \dfrac{1}{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n} = [a_0,\ a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n].$

**Tétel** $(L,1)$: *<u>Legyen a továbbiakban</u>*

$$\left.\begin{array}{llll} p_0 = a_0, & p_0 = a_1 a_0 + 1, & p_2 = a_2(a_1 a_0 + 1) + a_0, & \dots, p_j = a_j p_{j-1} + p_{j-2}, \ \dots \\ q_0 = 1, & q_0 = a_1, & q_2 = a_2 a_1 + 1, & \dots, q_j = a_j q_{n-1} + q_{j-2}, \ \dots \end{array}\right\} 2 \le j \le n \quad, (2)$$

*<u>ekkor</u>* $C_j = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j] = \dfrac{p_j}{q_j}.$

**Bizonyítás:** Igazoljuk a fenti összefüggést $n$ szerinti teljes indukcióval. Az $n = 0, n = 1,$ eset az előzőek alapján igazoltnak tekinthető. tegyük fel, hogy $n$-ig igaz, s mutassuk meg, hogy akkor $n+1$-re is teljesül a tétel állítása. Azaz tegyük fel, hogy érvényes az



+

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad (3)$$

összefüggés. Figyelembe véve a

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \ldots = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}}, \text{-t}$$

egyszerű számolás után kapjuk, hogy $= \frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. S ezzel a bizonyítás kész.

**Tétel** $(L,2)$: Ha $n \geq 2$, akkor $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$ $(4)$ és $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$ $(5)$ összefüggések teljesülnek.

**Bizonyítás:** Az $(3)$ illetve az $(2)$ képletek felhasználásával $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = (-1)(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1})$. Ezt megismételve $n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 3,\ 2$ esetén $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \ldots = (-1)^{n-1}(p_1 q_0 - p_0 q_1) = (-1)^{n-1}$ adódik a tétel $(4)$ formulája. Az $(4)$-t végig osztva $q_n q_{n-1}$-gyel adódik az $(5)$ képlet.

**Tétel** $(L,3)$: <u>Ha</u> $n \geq 2$, <u>akkor</u> $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$ $(6)$ és $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}$ $(7)$ <u>összefüggések teljesülnek</u>.

**Bizonyítás:** Az $(3)$, $(2)$ illetve az $(4)$ képletek felhasználásával $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) = (-1)^n a_n$ nyerjük az $(6)$ összefüggést. Az $(6)$-t végig osztva $q_n q_{n-2}$-vel adódik az $(7)$ képlet.

**Következmény:** 1. Ha $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, akkor $(p_k, q_k) = 1$. Valóban, ha $(p_k, q_k) = d_k \Rightarrow \forall x_0, y_0 \in Z\ d_k \mid p_k x_0 + q_k y_0$. Az $(4)$ szerint viszont, ha $x_0 = p_{n-1}; y_0 = q_{n-1}$, akkor $p_k x_0 + q_k y_0 = (-1)^{k-1}$ azaz valóban $d_k = 1$. Valóban, ha $(p_k, q_k) = d_k$, akkor $\forall x, y \in Z$ esetén a $d_k$ osztani fog bármely egész számot, mely $p_k x + q_k y$ alakú, azaz $d_k \mid (p_k x + q_k y)$. Az $x = q_{k-1},\ y = -p_{k-1}$ választás mellett $d_k \mid (p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}) = (-1)^{k-1}$ azaz ekkor $d_k = 1$.

2. α, $C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = (-1)^{k-1}$ ; β, $C_k - C_{k-21} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}$ ;

γ, $C_1 > C_3 > \ldots > C_{2n-1} > C_{2n+1} > \ldots\ldots$
$C_0 < C_2 < \ldots < C_{2n} < C_{2n+2} < \ldots\ldots$

**Tétel:** <u>Ha</u> $n \geq 1$, <u>akkor</u> $q_n \geq q_{n-1}$ <u>és az éles egyenlőtlenség teljesül, ha</u> $n > 1$.

Ha $n = 1 \Rightarrow q_0 = 1$ $q_1 = a_1 \geq 1$. Ha $n \geq 2 \Rightarrow q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + 1$, ezért $q_n > q_{n-1}$ és $q_n \geq n$.



+

Legyen $\alpha$ egy irracionális szám, definiáljuk az $a_k = \alpha_k$ ., $\alpha_{k+1} = \dfrac{1}{\alpha_k - a_k}$ sorozatokat rekurzív módon. Az $C = a_0, a_1, ..., a_n, ...$ végtelen lánctörtet az $\alpha$ lánctörtjének nevezzük.

**Tétel:** Ha a $C_n = a_0, a_1, ..., a_n$ , akkor $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = \alpha$ .

**Példa:** Legyen $\alpha = \sqrt{6}$ , ekkor $a_0 = \left[\sqrt{6}\right] = 2,\ \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}^{\,2} - 2^2} = \dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$

$$a_1 = \left[\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right] = 2,\ \alpha_2 = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}\right) - 2} = \sqrt{6}+2,$$

$$a_2 = \left[\sqrt{6}+2\right] = 4,\ \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}+2-4} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} = \alpha_1\ \ \sqrt{6} = 2,2,4,2,4,2,4,.... \ .$$

**Definíció:** Az $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ lánctörtet periodikus lánctörtnek mondjuk, ha létezik egy olyan $N_0$ és $p$ egész szám, hogy ha $n \geq N_0$ , akkor $a_{n+k} = a_n$ . Az előző mondatban szereplő $p$ természetes számok közül a legkisebbiket $p_0$ -t lánctört periódusának mondjuk.

**Tétel:** <u>Az</u> $\alpha$ <u>*valós szám lánctörtje*</u>, <u>*akkor és csak akkor véges*</u>, <u>*ha*</u> $\alpha$ <u>*racionális szám*</u>.

**Tétel:** *Az* $\alpha$ <u>*valós szám lánctörtje*</u>, <u>*akkor*</u> és <u>*csak akkor végtelen periodikus lánctört*</u>, <u>*ha*</u> $\alpha$ <u>*másodfokú algebrai szám*</u>.

A $d$ számot <u>***négyzetmentes***</u>nek mondjuk, ha a prímtényezős felbontásában bármely $p_j$ prím csupán első hatványon fordul elő, azaz $d$ felírható $d = p_1 p_2 ... p_k$ alakban, ahol a $p_1, p_2, ..., p_k$ rendre különböző prímeket jelölnek.

**Definíció:** Az $x^2 - dy^2 = +1$ egyenletet, ahol $d > 1$ és négyzetmentes egész <u>***Pell-féle egyenlet***</u>nek nevezzük.

**Megjegyzés:** Az $x^2 - 61y^2 = 1$ egyenletnek az egyik megoldását $x_1 = 1\ 766\ 319\ 049,\ y_1 = 226\ 153\ 980$ már Bhaskara[1] megadta.

**Példa:** Az $\alpha = \sqrt{13} = \left[3, \overline{1,1,1,1,6}\right]$ periódusának a hossza 5-t. A $x^2 - 13y^2 = 1$ egyenlet pozitív egész megoldásai, a $p_{10j-1}, q_{10j-1}$ alakú számpárok lesznek, ahol $j = 1,2,...$. S a legkisebb pozitív egész megoldása a $p_9 = 649, q_9 = 180$ lesz. S az $x^2 - 13y^2 = -1$ megoldásai a $p_{10j-6}, q_{10j-6}$ alakú számpárok lesznek, ahol $j = 1,2,...$. S a legkisebb pozitív egész megoldása a $p_4 = 18,\ q_4 = 5$ lesz.

---

[1] Bhaskara (1114-1185) Indiában *Biddur*-ban született. Az *Ujjain*-ben lévő csillagvizsgáló vezetőjeként dolgozott. Több könyvet is írt (*Lilavati, A szépség; Bijaganita, A számlálás alapja)* melyek indiában sokáig az algebra, geometria , számelmélet tankönyveiként szolgáltak. ugyancsak fontos volt a a csillagászatról írt *Siddhantasiromani* c könyve is.



+