Grafikus sorozatok

Jelölje $D=(d_0,d_1,d_2,\ldots,d_{d_0-1},d_{d_0},d_{d_0+1},\ldots,d_{v-1})$ az egyszerű $v=|V(G)|$ csúcspontú gráf fokszámsorozatát. Nem negatív egészek $A=(a_0,a_1,\ldots,a_{n-2},a_{n-1})$ sorozatát *grafikus sorozat*nak mondjuk, ha van olyan egyszerű $G(E,\varphi,V)$ gráf, amelyre teljesül, hogy $V=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}\}$ és $d(x_i)=a_i$ $(0\le i\le n-1)$. Általában a sorozat elemeit nagyságuk szerint csökkenő sorrendbe írjuk le azaz $a_i\ge a_{i+1}$.

Tétel(Havel-Hakimi[1]**):** *A* $D=(d_0,d_1,d_2,\ldots,d_{d_0-1},d_{d_0},d_{d_0+1},\ldots,d_{v-1})$ *nem negatív egészek sorozata, akkor és csak akkor grafikus sorozat, ha a* $D'=(d_1-1,d_2-1,\ldots,d_{d_0-1}-1,d_{d_0}-1,d_{d_0+1},\ldots,d_{v-2},d_{v-1})$ *sorozat is grafikus sorozat.*

Bizonyítás:

I.. Tegyük fel először, hogy a D' grafikus sorozat. Ez a feltevés azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $G'(E',\varphi',V')$ gráf, amelynek fokszámsorozata D'. Azaz, ha $x_i\in V'$, akkor $d(x_i)=\begin{cases} d(x_i)=d_i-1, & ha\ 1\le i\le d_0 \\ d(x_i)=d_i, & ha\ d_0<i\le v-1\end{cases}$. . A $G'(E',\varphi',V')$ gráfból oly módon készítsük el a $G(E,\varphi,V)$ gráfot, hogy a $G'(E',\varphi',V')$ gráf csúcsaihoz vegyük hozzá az x_0 csúcsot és az x_0-t kösse össze él x_i-vel, ha $1\le i\le d_0$. Valóban, ha $x_i\in V(G)=V=V'\cup\{x_0\}$, ekkor $d(x_i)=d_i$, azaz a $G(E,\varphi,V)$ gráf fokszámsorozata valóban D.

II. A második esetben azt tételezzük fel, hogy van olyan $G(E,\varphi,V)$ gráf melynek fokszámsorozata D. Meg kell mutatnunk, hogy létezik olyan egyszerű $G'(E',\varphi',V')$ gráf, melynek fokszámsorozata D'. Két esetet , α illetve β esetet különböztetünk majd meg.

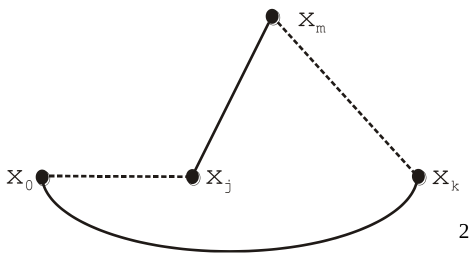
α; Az α esetben feltételezzük, hogy a $G(E,\varphi,V)$ gráfunk olyan, hogy az x_0-t él köti össze x_i-vel, ha $1\le i\le d_0$ és ha $x_i\in V(G)=V=V'\cup\{x_0\}$, ekkor $d(x_i)=d_i$. Ha a

[1] A tételt egymástól függetlenül közölte V.Havel, [A remark on the existence of finite graphs (Czeh),Časopis Pěst. Mat. 80 (1955) 477-480] és S. L. Hakimi [On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph, SIAM J. Appl. Math. 10 (1962), 496-506].

$G(E,\varphi,V)$ gráf x_0 csúcsát töröljük (és persze ekkor töröljük az összes x_0 -ra illeszkedő élt is) a kapott $G' = G - \{x_0\}$ gráf fokszámsorozata pontosan D' lesz.

β; Tételezzük most fel, hogy a $G(E,\varphi,V)$ gráf csúcspontjainak $X = \{x_{j_1}, x_{j_2},...,x_{j_n}\}\ (ahol\ 1 \le j_1, j_2,..., j_n \le d_0)$ halmazának egyetlen egy eleme sem szomszédos x_0 -lal. Vegyük észre, hogy X nem üres ($|X| \neq 0$) azaz X -nek létezik legalább egy eleme ($|X| \geq 1$), egyébként az α esetről volna szó. Ekkor létezik $G(E,\varphi,V)$ csúcspontjainak egy olyan $Y = \{x_{k_1}, x_{k_2},...,x_{k_n}\}\ (ahol\ d_0 < k_1, k_2,..., k_n \le v-1)$ részhalmaza, amelynek minden egyes elemét él köti össze x_0 -lal.

Lássuk be, hogy létezik olyan j,k, amelyre teljesül, hogy $j \in \{j_1, j_2,..., j_n\}$ és $k \in \{k_1, k_2,...,k_n\}$ és $d(x_j) > d(x_k)$. Ha az előző feltétteleknek egyetlen j,k pár sem tesz eleget, akkor ez a D sorozat monoton csökkenő volta miatt azt jelenti, hogy $j_1 = j_2 = ... = j_n = k_1 = k_2 = ... = k_n$. Ekkor a $G(E,\varphi,V)$ gráf csúcsait át lehet úgy indexelni, hogy ismét az α esethez jutunk. Tehát feltehetjük, hogy van olyan j,k pár amelyre teljesül, hogy $x_j \in X\ és\ x_k \in Y$ továbbá $d(x_j) > d(x_k)$. Abból a tényből, hogy a $G(E,\varphi,V)$ gráf egyszerű és az x_j csúcsának a foka nagyobb mint az x_k csúcsának a foka az adódik, hogy G-nek van olyan x_m csúcsa, melyet él köt össze x_j -vel, de nem szomszédos x_k -val.



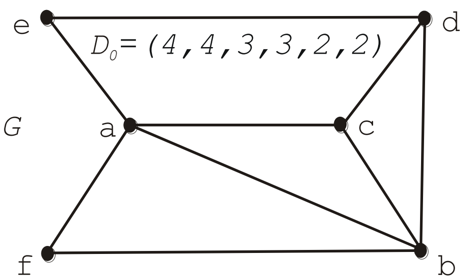
[2]

[2] Az ábrának megfelelő kapcsolót , ahol is a kapcsolás azt jelenti, hogy az x_0 x_k és az x_j x_m közötti összekötetést megszüntetjük, viszont az x_0 x_j illetve z x_m x_k között összekötetést létesítünk Ryser kapcsolónak szokás nevezni Herbert John Ryser cikke nyomán. Lsd. H.J.Ryser, Combinatorial Mathematics, Carus Mathematical Monographs, Vol. 14. Mathematical Association of America, Washington D.C., 1963.

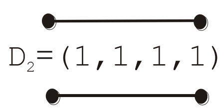
Jelöljük $G_1 = G_1(E_1, \varphi_1, V_1)$-gyel azt a gráfot,amelyet G-ből oly módon kapunk, hogy töröljük az x_0-t az x_k-val és az x_j-t az x_m-mel összekötő élt és hozzá vesszük az x_0-t az x_j-vel és az x_m-t az x_k-val összekötő új éleket. Ekkor a G és G_1 gráfok fokszámsorozatai megegyeznek (bár az előfordulhat, hogy G és G_1 gráfok nem izomorfak) és a G_1 gráfhoz tartozó *X'* halmaznak eggyel kevesebb eleme van, mint *G*-hez tartozó X halmaznak.. Az előbbi eljárást n-szer megismételve az α esethez jutunk. S ezzel a bizonyítás kész.

A tétel alapján könnyű megadni egy olyan hatékony algoritmust, amely egyrészt eldönti ,hogy egy adott $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ sorozat grafikus-e vagy sem és igenlő válasz esetén meg is ad egy gráfot melynek fokszámsorozata $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$. A tétel ugyanis valamely $A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ sorozat grafikus voltát visszavezeti eggyel kevesebb elemű sorozat grafikus voltának az eldöntésére (s a sorozat néhány eleme is legalább eggyel kisebbek lesz).

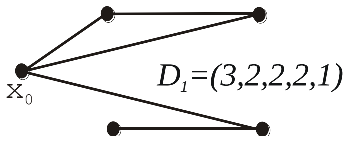
Példa: Legyen adott a G gráf, melynek fokszámsorozata $D_0 = (4,4,3,3,2,2)$.



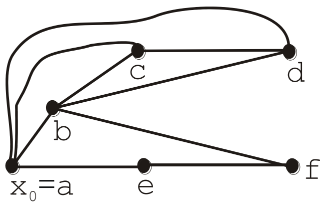
A tételünk miatt, ekkor a $D_1 = (3,2,2,1,2) = (3,2,2,2,1)$ sorozat is grafikus sorozat. Sőt a D_1 fokszámsorozatból elkészített $D_2 = (1,1,1,1)$ sorozat is az. A D_2 sorozatnak megfelelő gráfot könnyen lerajzolhatjuk 4 csúcspontból áll és mindegyik csúcsának foka 1.



Az $(1,1,1,1)$ sorozatnak megfelelő gráfból készítsük el a $D_1 = (3,2,2,1,2) = (3,2,2,2,1)$ $D_1 = (3,2,2,2,1)$ sorozatnak G_2 megfelelő gráfot.



S A D_1 fokszámsorozatnak megfelelő G_2 gráfból legyártható egy D_0 fokszámsorozatú G_1 gráf is.



G_1

Könnyű észrevenni, hogy a G_1 gráf és a *G* gráf nem izomorf, mivel G_1-ben a 2 másodfokú csúcspont (*e* és *f*) szomszédos, míg G-ben nem.

Feladatok:

1. Állapítsa meg, hogy a következő fokszámsorozatok közül, melyik grafikus! A; *(5,5,4,4,2,2) B; (5,4,4,3,3,3 9 C; (5,4,4,4,3,3) D; (2,2,2,2,1,1)*

2. Mutassa meg, hogy nem létezik olyan egyszerű gráf, amelyre teljesedne, hogy bármely két csúcspontjának a foka különböző!