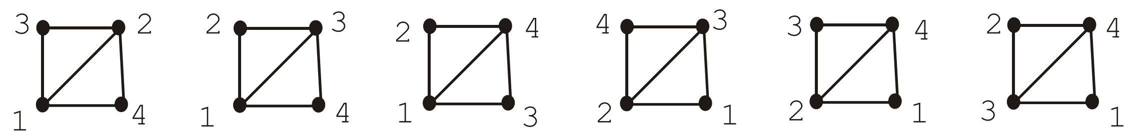
# Gráfok összeszámlálása

Jelölje $G_p(x)$ azt a polinomot, amelynél az $x^k$ együtthatója pontosan a k élű $p$ csúcspontú címkézett gráfok száma, ekkor

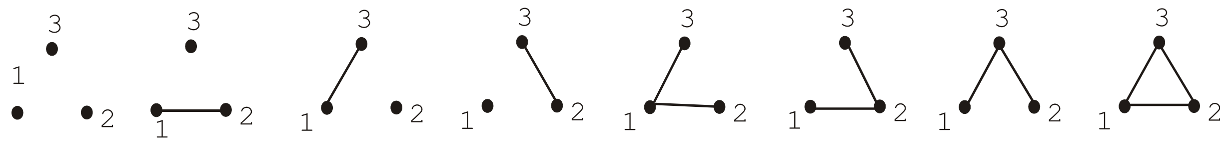
$$G_p(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k=(1+x)^m,\ ahol\ m=\binom{p}{2}.$$




4 csúcspontú 5 élű gráf csúcspontjainak 6 különböző címkézése.

Megjegyezzük, hogy az $\binom{m}{k}$ szimbólum az ún. binomiális együtthatót jelöli. Ismertnek tekintjük (s később meg fogjuk mutatni), hogy $\binom{m}{k}=\frac{m!}{(m-k)!k!}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-2))(m-(k-1))}{1\cdot 2\ldots(k-1)k}$, ahol az $m!=1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-2)(m-1)m$ szám az m-faktoriálist jelölte. Megállapodás szerint $0!=1$.

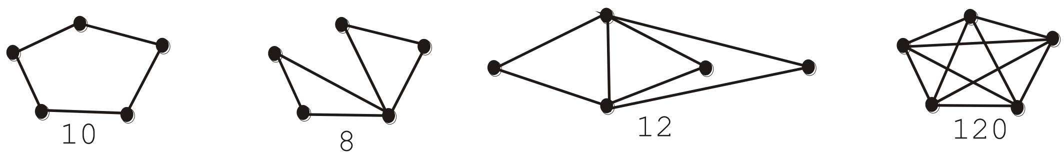
A $G_p(x)$ függvénybe egyet helyettesítve megkapjuk a $p$ csúcspontú címkézett egyszerű gráfok számát $G_p(1)=(1+1)^m=2^{\binom{p}{2}}=2^{\frac{p(p-1)}{2}}$.




8 harmadrendű cimkézett gráf.

A G gráf önmagára történő $\varphi$ kölcsönösen egyértelmű (bijektív) leképezését G automorfizmusának mondjuk, ha G-nek tetszőleges két $v_i, v_j$ csúcsát, akkor és csak akkor köti él össze, ha képeiket is $\varphi(v_i), \varphi(v_j)$ él köti össze. A G gráf automorfizmusai a leképezések egymás utáni végrehajtására nézve csoportot alkotnak, e csoport elemeinek a számát jelölje : $|aut(G)|$.

**Tétel:** *A $p$ csúcspontú G gráf különböző címkézéseinek a száma* $l(G)=\frac{p!}{|aut(G)|}$.




Az ábrán 4 öt csúcspontú Euler-gráf látható. Az egyes gráfok alatt látható szám az adott gráf automorfizmus csoportjának a rendjével ( elemeinek a számával) egyezik meg.

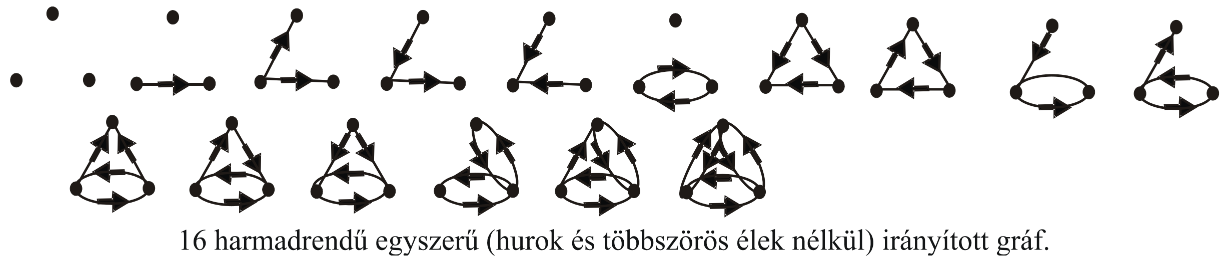
**Tétel:** *Azon p csúcspontú címkézett egyszerű gráfoknak a száma, melyeknek minden csúcsának a foka páros szám* $W_p = 2^{\binom{p-1}{2}}$.

**Bizonyítás:** Egy-egyértelmű megfeleltetést hozzunk létre a *p-1* csúcspontú egyszerű címkézett gráfok és az olyan *p* csúcspontú egyszerű címkézett gráfok között, melyeknek minden foka páros. Jelöljük *G*-vel a *p-1* pontú egyszerű címkézett gráfot. Vegyünk hozzá *G*-hez egy új pontot s annak a címkéje, legyen *p*. A *p*-vel címkézett pontot,akkor és csak akkor kössük össze *G* valamely pontjával, ha annak foka páratlan, az így kapott *G'* gráf címkézett és egyszerű és minden csúcsának a fokszáma páros . Ugyanis a *G* minden csúcsának a foka páros lesz, másrészt a *p*-vel jelölt csúcs foka is páros, mivel bármely gráf páratlan fokú csúcsainak a száma páros. Könnyen észrevehető különböző *G*-khez különböző *G'* fog tartozni és fordítva is különböző *G'*-höz különböző címkézett *G* fog tartozni. S ez pontosan azt jelenti, hogy a leképezés bijektív.

**Tétel:** *A* $w_p(x) = \frac{1}{2^p}(1+x)^{\binom{p}{2}} \sum \binom{p}{n} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n(p-n)}$ *polinomban az* $x^q$ *együtthatója megegyezik a p csúcspontú, q élű egyszerű cimkézett gráfok számával, melyeknek a fokszámai párosak.*

Kicsi p-re az $w_1(x) = w_2(x) = 1$, $w_3(x) = 1 + x^3$, $w_4(x) = 1 + 4x^3 + 3x$ kitevő a 3x-ben 4.

Jelölje $D_p(x)$ a $p$ csúcspontú irányított címkézett gráfok generátor függvényét.



16 harmadrendű egyszerű (hurok és többszörös élek nélkül) irányított gráf.

**Tétel:** $D_p(x) = \sum_{k=0}^{p(p-1)} \binom{p(p-1)}{k} x^k = (1+x)^{p(p-1)}$.

Könnyen látható, hogy $D_p(x) = (G_p(x))^2$, s ezért a p csúcspontú címkézett, irányított gráfok száma $D_p(x) = G_p^2(x) = 2^{p(p-1)}$ .

Címkézett *p* csúcspontú összefüggő gráfok száma

Jelölje $C_p$ a $p$ csúcspontú címkézett összefüggő gráfok számát.

**Tétel:** *Az összefüggő címkézett p csúcspontú gráfokra teljesül a következő rekurzív összefüggés:*

$$C_p = 2^{\binom{p}{2}} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} k\binom{p}{k} 2^{\binom{p-k}{2}} C_k .$$

**Bizonyítás:** A bizonyítás során használni fogjuk a gyökér fogalmát. A gyökér a gráf egy kitüntetett pontját jelöli. Két gyökeres gráfot izomorfnak mondunk, ha izomorfak és az izomorfizmusuknál gyökérnek gyökér felel meg. A p csúcspontú gráf bármely pontját választhatjuk gyökérnek ezért a p csúcspontú cimkézett gyökeres gráfok száma pontosan p szerese a p csúcspontú címkézett gyökér nélküli gráfok nak gráfok $G_p$-nek. Ha a gyökér pontosan a k csúcspontú komponensben van, akkor az ilyen tipúsú p csúcspontú gráfok száma pontosan $kC_k\binom{p}{k}G_{p-k}$ . Ha ezeket a számokat $k = 1$-től $p-1$-ig összegezve adódik, hogy $\sum_{k=1}^{p-1} k\binom{p}{k}C_k G_{p-k}$ . Azaz az előbbi formula $\frac{1}{p}$-szerese adja a rossz esetek számát, mikor is a gráf nem összefüggő és legalább 2 komponense van és az egyik komponens csúcspontjainak k száma egynél nagyobbb egyenlő és $p-1$-nél kisebb egyenlő.a száma (előfordulhat persze, a $p-k$ csúcspontú másik része a gráfnak sok kicsi komponensből áll.

A következő táblázat alapján érzékelhető $C_p$ gyors növekedése, ami ismét illusztrálhatja a „kombinatorikus robbanás mértékét”.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | | | | | | | 7 | 8 | 9[1] |
| $C_p$ | | | | 8 | 28 | 6 708 | 1<br>866 256 | 25<br>1 548 592 | 66 296<br>291 072 |

Az előző leszámlálási technika kezelhetőbbé tétele érdekében vezessük be az exponenciális generátor függvény fogalmát. Jelölje $a_k$ a $P(\alpha)$ tulajdonságú $k$ csúcspontú cimkézett $G_1$ gráfok számát és jelölje $b_k$ a $P(\beta)$ $k$ csúcspontú tulajdonságú cimkézett $G_2$ gráfok számát. Ekkor az $a_k$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye $a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ , illetve a $b_k$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye $b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$ .

[1] Sloane, N. J. „Handbook of Integer Sequences”, Academic Press, New York, 1973.

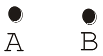
A következő lemma hasznos információkkal fog szolgálni a két generátor függvény szorzatának $a(x)b(x)$-nek az együtthatóiról.

**Lemma:** Az $\dfrac{x^k}{k!}$ tag együtthatója az $a(x)b(x)$ hatványsorában azon rendezett $(G_1, G_2)$ rendezet gráf párok számával egyezik meg, amelyek él és csúcs idegenek és $G_1$ rendelkezik a $P(\alpha)$ tulajdonsággal, $G_2$ pedig a $P(\beta)$ tulajdonsággal, s $k$ jelöli a $G_1 \cup G_2$ pontjainak a számát, melyek $1$-től $k$-ig címkézve vannak.

A lemma illusztrációjaként vegyük szemügyre a címkézett összefüggő gráfok $C(x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k \dfrac{x^k}{k!}$ generátor függvényének négyzetét $C^2(x)$. Azaz e példában legyen $a(x)=C(x)$ és $b(x)=C(x)$. Ekkor $C^2(x)$ 2-vel végig osztva megkapjuk azon címkézett gráfok generátor függvényét, melyeknek pontosan 2 komponense van. Valóban

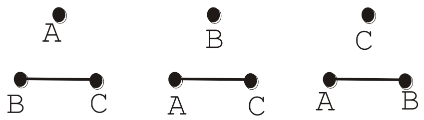
$$\frac{1}{2}C^2(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2!}+4\frac{x^3}{3!}+38\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(x+\frac{x^2}{2!}+4\frac{x^3}{3!}+38\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+38\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1x^4+\ldots+\ldots\right)=2\frac{x^2}{2!}+3\frac{x^3}{3!}+19\frac{x^4}{4!}+\ldots+\ldots$$

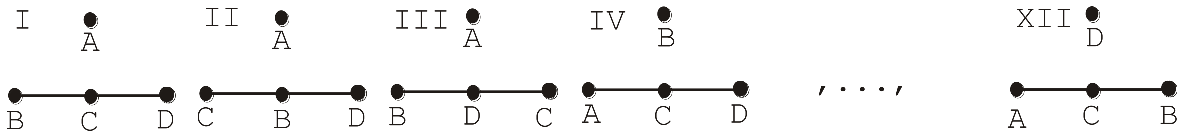


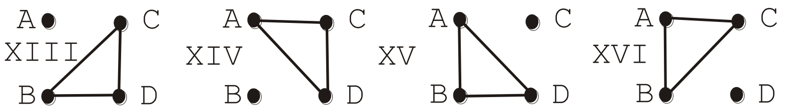

*k=2; V(G$_1$)=V(G$_2$)=1;*

*k=3; V(G$_1$)=1,V(G$_2$)=2*

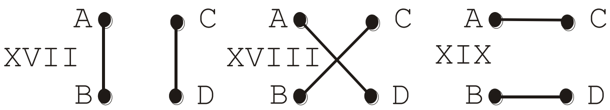



*k=4; C$_4$=19=12+4+3;*




*V(G$_1$)=1,V(G$_2$)=3;*




*V(G$_1$)=2,V(G$_2$)=2;*

Kicsit általánosabban és egyszerűbben fogalmazva a $\dfrac{C^n(x)}{n!}$ függvényben az $\dfrac{x^k}{k!}$ tag együtthatója a $k$ csúcspontú $n$ komponensű címkézett gráfok számával egyezik meg.