

Generátorfüggvények, rekurzív sorozatok

"Hajdanában a Csi-beli Kang fejedelem annyi muzsikálást és harci táncot rendezett, hogy tízezernyi emberének sokszor még durva kabát sem jutott öltözékül, sokszor még korpa sem jutott táplálékul."

**Mo Ti: A zene elítélése, A szépség szíve (Régi kínai esztétikai írások),
Európa Könyvkiadó, Bp. 1984. 11. old.)**

Természetes számok halmazán gyakran értelmeznek olyan valós, esetleg komplex értékű $f(n)$ függvényeket, melyeknek az n helyen felvett értékei az $1, 2, \dots, (n-1)$ helyeken felvett értékeitől függenek. Például egy 10 éve fennálló vállalkozás alaptőkéje nyilván függ az előző években az alaptőke növelésére esetleg csökkentésére fordított összegek nagyságától, bár ezen összefüggések kiváltképp napjainkban eléggé ködösek lehetnek. Mi itt csupán olyan rekurzív összefüggésekkel fogunk foglalkozni, melyet matematikán belül lineárisan rekurzív sorozatoknak szokás nevezni.

9.1. DEFINÍCIÓ. Legyenek $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-2}, u_{k-1}$ tetszőleges valós vagy komplex számok. Az

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+(k-1)} + a_{k-2}u_{n+(k-2)} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n \quad (\text{RK1})$$

sorozatot az $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-2}, u_{k-1}$ kezdőértékekkel és az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, a_{k-1}$ együtthatókkal adott k -ad rendű *lineárisan rekurzív sorozat*nak nevezzük.

Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok köréből máig a legnépszerűbb, s valószínűleg a legrégebb példa a Fibonacci-sorozat:

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 5, u_5 = 8, \dots, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Leonardo Fibonacci¹ (eredeti neve Leonardo Pisano, (pisai Leonardo)) Liber Abaki (könyv az abakuszról) c. művében jelenik meg először.

¹Leonardo Pisano Fibonacci 1170-ben Pisa-ban született, s ott is halt meg 1250-ben. Apja diplomataként Észak-Afrikában képviselte a Pisai Köztársaságot. Az ókori matematikusok műveit arab közvetítéssel tanulmányozta. Több könyvet írt, melyek közül néhány örökre elveszett. Sokan Diofantosz óta őt tartották a legnagyobb számelméletésznek Fermat felléptéig. Sokat foglalkozott az irracionális számokkal és a négyzetszámokkal. Napjainkban a nevét viseli egy matematika folyóirat, a Fibonnaci Quart.



A Fibonacci-sorozat a következő problémából keletkezett:

Hány pár nyúl származhat egyetlen pártól, ha

- (i) minden pár havonta egy párt nemz, amely a második hónaptól kezdve lesz nemzőképes és
- (ii) mindegyik nyúl halhatatlan?

9.2. DEFINÍCIÓ. Az (RK1) k -ad rendű lineáris rekurzív sorozat *karakterisztikus polinomjának* nevezzük a következő polinomot:

$$f(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_2x^2 - a_1x - a_0 \quad (\text{RK2})$$

Ha az (RK2) gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ páronként különbözőek, akkor a sorozat n -edik tagja felírható

$$u_n = c_k \alpha_k^n + c_{k-1} \alpha_{k-1}^n + \dots + c_2 \alpha_2^n + c_1 \alpha_1^n \quad (\text{RK3})$$

alakban. Ha azonban csak $m < n$ gyökünk van, s az i -edik gyök multiplicitása s_i , akkor sorozatunk n -edik tagja az alábbi alakban írható:

$$u_n = \sum_{i=0}^{i=m} \alpha_i^n (c_{i,0} + c_{i,1} \alpha_i + \dots + c_{i,s_i-1} \alpha_i^{s_i-2} + c_{i,s_i} \alpha_i^{s_i-1}).$$

Látható, hogy a sorozat általános alakja teljesen analóg az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek megoldásával.

9.1. TÉTEL. Ha az $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+(k-1)} + a_{k-2}u_{n+(k-2)} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n$ összefüggést a $Z_1(z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,j}, \dots)$, $Z_2(z_{2,1}, z_{2,2}, \dots, z_{2,j}, \dots)$, ..., $Z_k(z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,j}, \dots)$ sorozatok kielégítik, akkor tetszőleges c_1, c_2, \dots, c_k konstansok esetén kielégíti a $V(v_1, v_2, \dots, v_j, \dots)$ sorozat is, ahol $v_j = c_1 z_{1,j} + c_2 z_{2,j} + \dots + c_k z_{k,j}$, ($j = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$).

Bizonyítás: A tétel feltételei szerint bármely $i = 1, 2, \dots, k$ és $n = k, k+1, k+2, \dots, h$ esetén teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$z_{i,n+k} = a_{k-1}z_{i,n+(k-1)} + a_{k-2}z_{i,n+(k-2)} + \dots + a_1z_{i,n+1} + a_0z_{i,n}.$$

Szorozzuk meg az i -ediket c_i -vel majd adjuk össze őket. Ekkor felhasználva azt, hogy $v_j = c_1 z_{1,j} + c_2 z_{2,j} + \dots + c_k z_{k,j}$ adódik, hogy

$$v_{n+k} = a_{k-1}v_{n+(k-1)} + a_{k-2}v_{n+(k-2)} + \dots + a_1v_{n+1} + a_0v_n$$

s ez az, amit bizonyítani kellett. \square

Nem okoz különösebb nehézséget megmutatni, hogy ha az (RK1) rekurzív összefüggés karakterisztikus polinomjának α_i gyöke, akkor $z_{i,j} = \alpha_i^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$) sorozat megoldása (RK1)-nek. Ha α_i gyöke (RK2)-nek, akkor az $\alpha_i^k = a_{k-1}\alpha_i^{k-1} + a_{k-2}\alpha_i^{k-2} + \dots + a_2\alpha_i^2 + a_1\alpha_i + a_0$ azonosságot végigszorozhatjuk α_i^n -nel és látható, hogy (RK1) teljesül.

Példa: A Fibonacci-sorozat karakterisztikus egyenlete $x^2 = x + 1$, gyökei $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel u_n -et $u_n = c_1 \alpha_1^n + c_2 \alpha_2^n$ alakban keressük, írjunk be n helyére $n = 0$ és $n = 1$ -et, c_1, c_2 -re

kapjuk az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(c_1 - c_2) &= 1 \end{aligned}$$

melynek megoldása $c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. A Fibonacci-sorozat n -edik elemét ezek szerint írhatjuk az

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

alakban, mely távolról sem tűnik triviálisnak. Megemlítjük, hogy külön folyóirata van a Fibonacci-féle számoknak. Rekurzív sorozatokra vonatkozólag nemzetközileg is elismert, szép eredmények kapcsolódnak Kiss Péter és Pethő Atilla nevéhez, mindketten a Győry Kálmán által létrehozott debreceni-számelméleti-iskola jeles személyiségei.

Az $U = \{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ k -ad rendű *polinomiálisan rekurzív sorozat*, ha tagjai kielégítik a következő összefüggést:

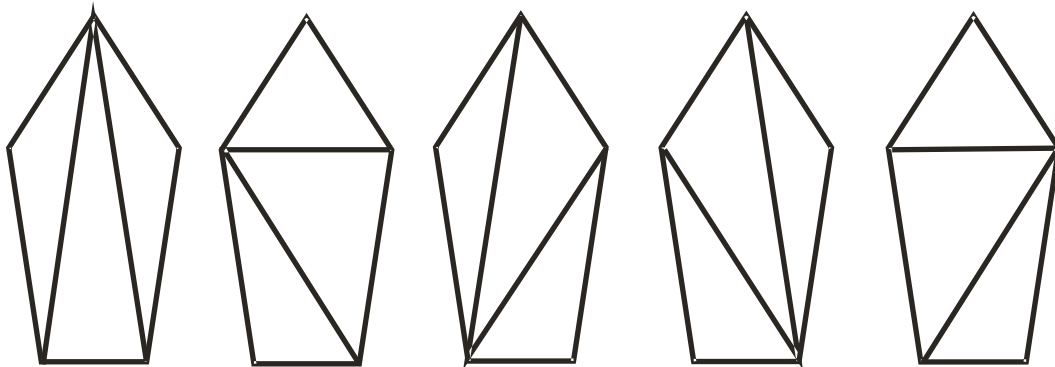
$$p_0(n)u_n + p_1(n)u_{n-1} + p_2(n)u_{n-2} + \dots + p_{k-1}(n)u_{n-k+1} + p_k(n)u_{n-k} = 0.$$

Általában feltesszük, hogy $u_n \in \mathbb{C}$ és $p_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ azaz azt, hogy a sorozat elemei komplex számok, a $p_j(n)$ együtthatók pedig a $p_j(x)$ komplex együtthatós polinomok n helyen felvett értékeit jelölik. Természetesen a legtöbb esetben a komplex számok \mathbb{C} teste helyett tekinthetünk egy tetszőleges F testet, s $\mathbb{C}[x]$ polinomgyűrű helyett ekkor természetesen az $F[x]$ polinomgyűrű veendő.

Példák polinomiális rekurzióra:

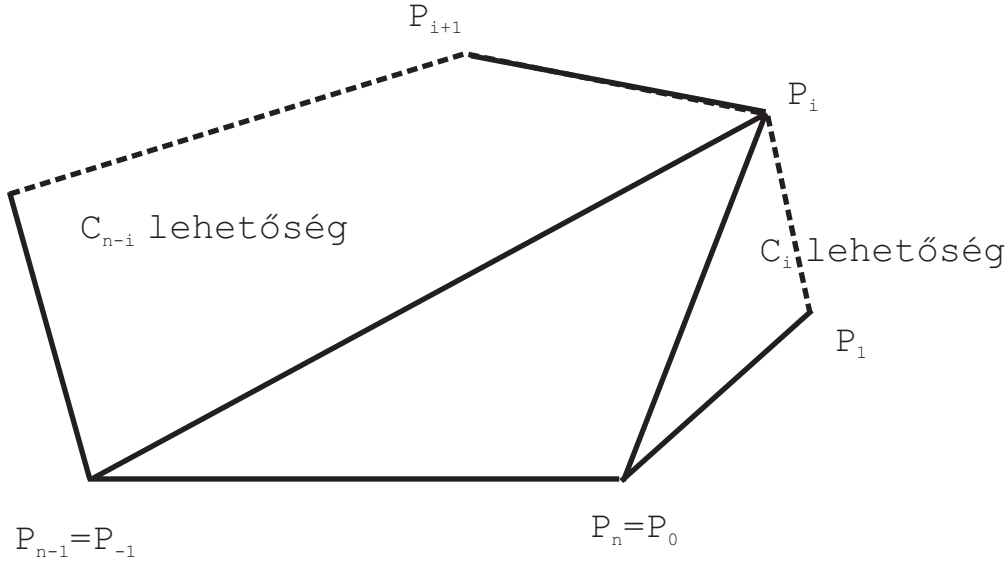
1. Az $u_n = n!$ polinomiális rekurziónak tesz eleget, mivel $u_n - nu_{n-1} = 0$.
2. Az $u_n = n^{-2}$ polinomiális rekurziónak tesz eleget, mivel $n^2u_n - (n-1)^2u_{n-1} = 0$.
3. Az $u_n = (n!)^{-1}$ polinomiális rekurziónak tesz eleget, mivel $nu_n - u_{n-1} = 0$.

Az n oldalú konvex sokszöget S_n -et átlóival többféleképpen lehet háromszögekre bontani. Az összes lehetséges különböző felbontások számát jelölje C_n . C_n -et az n -edik *Catalan-szám*nak mondjuk.



1. ábra.

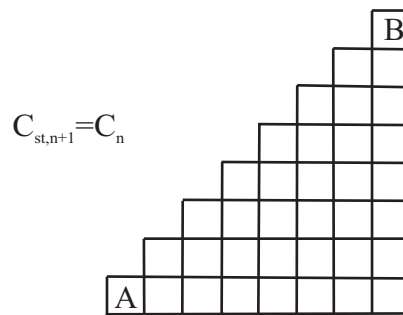
$C_0 = C_1 = 0, C_2 = C_3 = 1, C_4 = 2, C_5 = 5, C_6 = 14, \dots, C_n = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2}$. A Catalan-számok eleget tesznek az $(n-1)C_n - (4n-10)C_{n-1} = 0$ polinomiális rekurzióknak.



2. ábra.

A Catalan-számok eleget tesznek a $C_n = \sum_{i=1}^{n-2} C_{i+1}C_{n-i}$ rekurzív összefüggésnek.

A -ból B -be az $n \times n$ -es sakktábla töredéken a jó utak $C_{st,n}$ száma (csak vízszintesen ill. függőlegesen léphetünk) megegyezik az $(n+1)$ -edik Catalan-számmal, C_{n+1} -gyel. A táblát a főátlója mentén "törjük félbe".



3. ábra.

A generátorfüggvény elnevezést többféle értelemben is használják a matematika különböző területein. Mi itt kétféle lehetséges értelmezést fogunk megemlíteni. Először az úgynevezett partíciós problémákra vonatkozó generátorfüggvényekről beszélünk. Legyenek adotak az n_1, n_2, \dots, n_k pozitív egészek. Kérdezzük, hogy az m szám hányféleképpen állítható elő az n_1, n_2, \dots, n_k -k összegeiként oly módon, hogy bármely n_1, n_2, \dots, n_k számot többször

is felhasználhatunk, és a sorrend nem számít. A partíciós problémának az előbbi változatát szokás pénzváltási problémának is nevezni. Vizsgáljuk meg például, hogy valamely számot, hányféleképpen lehet előállítani az 1,2,3,5 számok összegeként. Tekintsük a következő függvényt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x^1 + x^2 + \dots + x^n + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots) \cdot \\ &\quad \cdot (1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{3n} + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{5n} + \dots) = \\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)} \end{aligned} \quad (\text{GK1})$$

Az $f(x)$ függvény lesz ez esetben a generátorfüggvény. Nem vizsgáljuk, hogy az $f(x)$ előállításában szereplő hatványsorok konvergensek-e vagy sem. Ha az $f(x)$ -et hatványsorba fejtsük

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m + \dots, \quad (\text{GK2})$$

akkor az A_m együttható fogja megmutatni, hogy m -et hányféleképpen lehet felírni az 1,2,3,5 számok összegeiként. Az A_m együtthatók meghatározására különböző módszerek léteznek. Egy lehet a következő: A (GK2) nevezőjében a szorzásokat elvégezve adódik

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m + \dots, \quad (\text{GK3})$$

A nevezővel végigszorozva, s figyelembe véve, hogy x_m együtthatója 0 a baloldalon, ha $m > 0$ az A_m együtthatókra az alábbi rekurzív összefüggést nyerjük:

$$A_m = A_{m-1} + A_{m-2} - A_{m-4} - A_{m-7} + A_{m-9} + A_{m-10} - A_{m-11} \quad (\text{GK4})$$

A kezdeti értékekre, ha $m < 0$, akkor $A_m = 0$ és ha $m = 0$, akkor $A_0 = 1$.

Más módon is meghatározhatjuk a (GK3) formula jobb oldalán álló hatványsor együtthatóit. A (GK4) formula jobb oldalán végezzük el az osztást!

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2+x^4+x^7-x^9-x^{10}+x^{11}}$$

$$1 : (1 - x - x^2 + x^4 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{11}) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 6x^5 + \dots$$

$$x + x^2 - x^4 - x^7 + x^9 + x^{10} - x^{11}$$

$$2x^2 + x^3 - x^4 - x^5 - x^7 - x^8 + x^9 + 2x^{10} - x^{12}$$

$$3x^3 + x^4 - x^5 - 2x^6 - x^7 - x^8 - x^9 + 2x^{10} + 2x^{11} + x^{12} - 2x^{13}$$

$$4x^4 + 2x^5 - 2x^6 - 4x^7 - x^8 - x^9 - x^{10} + 2x^{11} + 4x^{12} + x^{13} - 3x^{14}$$

$$6x^5 + 2x^6 - 4x^7 - 5x^8 - x^9 - x^{10} - 2x^{11} + 4x^{12} + 5x^{13} + x^{14} - 4x^{15}$$

Az alábbi definícióban egy sorozathoz más módon rendelünk generátorfüggvényt.

9.3. DEFINÍCIÓ. Adott $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ sorozat generátorfüggvénye az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m + \dots$ hatványsor.

Az esetek túlnyomó többségében itt sem érdekes, hogy a definícióban szereplő hatványsor milyen intervallumon konvergens.

Érdeemes megvizsgálni a generátorfüggvények segítségével a Fibonacci-sorozatot. Legyen

$$G(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \dots + u_nx^n + \dots \quad (\text{GK5})$$

a Fibonacci-sorozat generátorfüggvénye az előző definíció értelmében, s szorozzuk meg x -szel, majd x^2 -tel, nyerjük az alábbi képleteket:

$$xG(x) = u_0x + u_1x^2 + u_2x^3 + \dots + u_nx^{n+1} + \dots \quad (\text{GK6})$$

$$x^2G(x) = u_0x^2 + u_1x^3 + u_2x^4 + \dots + u_nx^{n+2} + \dots \quad (\text{GK7})$$

Ha a (GK5)-ből rendre levonjuk (GK6)-ot és (GK7)-et, adódik, hogy:

$$(1 - x - x^2)G(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x + (u_2 - u_1 - u_0)x^2 + \dots + (u_n - u_{n-1} - u_{n-2})x^n + \dots = x \quad (\text{GK8})$$

A (GK8)-ből $G(x)$ zárt alakja egyszerű osztással megkapható:

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

A $G(x)$ jobboldalán álló racionális törtfüggvényt bontsuk parciális törtek összegére a valós test felett. Figyelembe véve, hogy a nevezőben szereplő polinom gyökei $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$:

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \alpha x} + \frac{1}{1 - \bar{\alpha} x} \right), \quad (\text{GK9})$$

ahol $\bar{\alpha} = 1 - \alpha = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. A (GK9) jobb oldalán szereplő $\frac{1}{1 - \alpha x}$, $\frac{1}{1 - \bar{\alpha} x}$ függvények az $1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots + \alpha^n x^n + \dots$, $1 + \bar{\alpha} x + \bar{\alpha}^2 x^2 + \dots + \bar{\alpha}^n x^n + \dots$ mértani sorokkal egyeznek meg. Figyelembe véve, hogy abszolút konvergensek, alkalmas módon átrendezve megkapjuk, hogy a Fibonacci-sorozat tagjai írhatók $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \bar{\alpha}^n)$ alakban, összhangban a korábbi eredménnyel, (RK6)-tal. Megjegyezzük, hogy a Fibonacci-sorozatnak ezt az alakját a fenti levezetési technika használatával L. de Moivre már 1730-ban közölte.

Feladatok

1. Jelöljük $f_s(n)$ -nel azt a legnagyobb egész számot, amelyre fennáll a következő: bárhogyan is színezzük a teljes n -gráf éleit az s számú színek valamelyikével, mindig található benne csupa azonos színű élből álló legalább $f_s(n)$ pontú összefüggő részgráf.

(i) Mutassa meg, hogy bármely n -re $f_2(n) = n$.

(ii) Bizonyítsa be, hogy ha n pozitív páros szám, akkor $f_{n-1}(n) = 2$.

2. m számú sakkozót két csapatra osztunk. Két sakkozó akkor és csak akkor fog játszani egymással egy partit, ha különböző csapatban vannak. Hogyan kell az m sakkozót szétosztani, hogy a lehető legtöbb mérkőzést játsszák?

3. Mutassa meg, hogy a tóruszon van olyan térkép, melynek kiszínezéséhez hét szín kell!

4. Mutassa meg, hogy a Möbius-szalagon van olyan térkép, mely nem színezhető ki hatnál kevesebb színnel!

5. Bizonyítsa be, hogy az a térkép, amely véges számú kör megrajzolásával keletkezik a síkban, mindig kiszínezhető két színnel!

6. Bizonyítsa be, hogy egyenesek által meghatározott síkbeli térkép színezéséhez mindig elegendő két szín!

7. Mutassa meg, hogy ha egy térkép minden egyes tartományát legalább 3 él határolja, akkor az élek és a csúcsok között fennáll a következő egyenlőtlenség: $6 + q \leq 3n$ (ahol q az élek száma és n a csúcsoké)!

8. Írja fel az 5 csúcsú teljes gráf csúcs- ill. illeszkedési mátrixát!

9. Írja fel a $K_{3,3}$ gráf körmátrixát!

10. Ismerve az $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ sorozat $f(x)$ generátorfüggvényét, adja meg az $A' = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ generátorfüggvényét!

11. Legyen az $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ sorozat generátorfüggvénye $f(x)$ és a $B = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$ sorozaté $g(x)$, legyen továbbá adott a $C = (\alpha a_0 + \beta b_0, \alpha a_1 + \beta b_1, \dots, \alpha a_n + \beta b_n, \dots)$ sorozat fix valós α, β -val. Mutassa meg, hogy a C sorozat $h(x)$ generátorfüggvényére teljesül, hogy $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$!

12. Adjon meg olyan "kevés elemű" sorozatot, hogy bármely egész szám előálljon legfeljebb h darab sorozatbeli elem összegeként! (Ez a posta-bélyegek problémája.)

13. Mutassa meg, hogy bármely pozitív egész szám előáll a Fibonacci-sorozat különböző tagjainak összegeként!

14. Mutassa meg teljes indukcióval, hogy a Fibonacci-sorozat elemeire ($F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) érvényesek a következő összefüggések:

a., $F_1 + F_2 + \dots + F_{n-2} = F_n - 1$

b., $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$

c., $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

d., $F_1 - F_2 + F_3 - \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$

e., $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

15. Hányféleképpen lehet n lépcsőfokból álló lépcsőn felsétálni, ha egyszerre vagy egy vagy kettő lépcsőt lehet lépni?

Tárgymutató

| A | F |
|------------------------------------|----------------------------|
| alapkör 69 | fa 9 |
| alapvágat 69 | irányított 13 |
| alternáló út 56 | faktor |
| antilánc 25 | k-adfokú 41 |
| átmérő 7 | feszítőfa 13 |
| | Fibonacci-sorozat 95 |
| B | fokszám 5 |
| bázis 68, 77 | átlagos 5 |
| | be 4 |
| C | ki 4 |
| Catalan-szám 97 | maximuma 5 |
| ciklus 7 | minimuma 5 |
| | fokszámsorozat 7 |
| Cs | független halmaz 77 |
| csillag gráf 11 | |
| csúcspont 2 | G |
| izolált 6 | generátorfüggvény 98 |
| | gráf |
| D | biparticionált 14 |
| diszjunkt reprezentáns rendszer 52 | egyszerű 4 |
| duális | Euler- 35 |
| gráfé 64 | extrém 92 |
| matroidé 79 | irányított 2 |
| | ciklikus 58 |
| E | erősen összefüggő 43, 58 |
| él 2 | kritikus 82 |
| hurok- 4 | összefüggő 7, 56 |
| élfüggetlen utak 57 | páros 52 |
| élhalmaz | particionálható 52 |
| független 55 | reguláris 56 |
| szeperáló 46 | síkbarajzolható 60 |
| szétvágó 47 | teljesen particionált 14 |
| utakat lefogó 57 | tetszőlegesen bejárható 44 |
| élkromatikus szám 85 | üres 5 |
| erdő 10 | véges 2 |
| Euler-vonal | |
| nyílt 35 | Gy |
| zárt 35 | gyökér 13 |

- H**
- Hall-feltétel 54
 Hamilton-kör 39
 Hamilton-út 38
 hatványhalmaz 67
- I**
- inverzió 29
 izomorf 11
 topológikusan 64
- K**
- karakterisztikus függvény 24, 68
 karakterisztikus polinom 96
 kombináció 20
 ismétlése 20
 komplementer 14
 komponens 9
 kör 7, 78
 kötőél 74
 kromatikus index 85
 kromatikus polinom 83
 kromatikus szám 80
 különbség 3
- L**
- lineárisan független 68
- M**
- magyar módszer 55
 mátrix
 csúcs- (vagy szomszédossági) 75
 illeszkedési 73
 incidencia 71
 redukált 72
 kör- 74
 matroid 77
 grafikus 77
 mátrix- 77
 szabad 78
 triviális 78
 uniform 78
 metszet 3
 mohóalgoritmus 79
- N**
- négyszínsejtés 86
- O**
- ortogonális 68
 összefüggőségi szám
 csúcspont szerinti 48
- él szerinti 48
 ötszín-tétel 86
- P**
- párhuzamos élek 4
 párosítás 55
 maximális 55
 teljes 55
 párosítási probléma 53
 partíciós problémák 98
 Pascal-háromszög 22
 pénzváltási probléma 98
 permutáció 18
 ismétlése 19
 páratlan 29
 páros 29
 pontfüggetlen utak 56
 pontthalmaz
 lefogó 56
 minimális 55
 szeparáló 46
 posta-bélyegek problémája 101
 Prüfer-kód 50
- R**
- Ramsey-szám 91
 általános 93
 rang 77
 rendezetlen szorzat 2
 részgráf 2
 indukált 3
- S**
- séta 7
 skaláris szorzat 68
 sokszögháló 61
 sorozat
 lineárisan rekurzív 95
 polinomiálisan rekurzív 97
- Sz**
- szabályos poliéder 65
 szigorúan párhuzamos élek 4
 szimmetrikus csoport 28
 szimmetrikus-differencia 67
 szimplex 14
 szita-formula 26
 sztereografikus projekció 62
- T**
- tartomány 61
 távolság 7

teljes gráf 13
test
 2 elemű 67
topológikus bővítés 63
topológikus szűkítés 63
transzpozíció 29

U

unió 3
út 7
 irányított 13

V

vágás 47, 79
variáció
 ismétléses 19
 ismétlés nélküli 19
vektortér 67
vonal 7

Irodalomjegyzék

- Adhikari Sukumar Das:** *Aspects of Combinatorics and Combinatorial Number Theory.* Alpha Science International Ltd. India, 2002, ISBN 1-84265-049-1
- Aigner Martin, Ziegler Günter M.:** *Proofs from THE BOOK.* Springer, 1999
- Andrásfai Béla:** *Gráfelmélet (Folyamok, Mátrixok).* Akadémiai Kiadó Budapest 1983, Polygon, Szeged, 1994.
- Andrásfai Béla:** *Ismerkedés a gráfelmélettel.* Tankönyvkiadó Budapest 1971,1973, Introductory graph theory, Pergamon Press New York 1977.
- Bollobás Béla:** *Graph Theory.* Springer-Verlag New York 1979.
- Boltyanskij, V.G. és Gohberg, I.C.:** *Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából.* Tankönyvkiadó, Budapest 1970.
- Bóna Miklós:** *A walk through combinatorics. An introduction to enumeration and graph theory.* Singapore: World Scientific. xviii, 406 p. 2002.
- Busacker, R.G. és Saaty,T.L.:** *Véges gráfok és hálózatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969.
- Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest Ronald L.:** *Algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1997.
- Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest Ronald L.:** *Új Algoritmusok.* Scholar Kiadó, Budapest, 2003
- Diestel Reinhard:** *Graph Theory.* (Second Edition), Springer, 2000.
- Hajnal Péter:** *Összeszámlálási problémák.* Polygon, Szeged, 1997.
- Hajnal Péter:** *Gráfelmélet.* Polygon, Szeged, 1997.
- Hajnal Péter:** *Elemi Kombinatorikai Feladatok.* Polygon, Szeged, 1997.
- Halbetsram, H. and Richert,H.-E.:** *Sieve methods.* Acad. Press, New York, 1974.
- Herbert S. Wilf:** *Algorithms and Complexity.* (Electronic edition, 1994)
- R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász (Eds.):** *Handbook of Combinatorics.* (Springer 1996)
- Gross, Jonathan L.; Yellen, Jay:** *Handbook of graph theory.* (English),Boca Raton, FL: CRC. 1176 p. \$ 119.95; (2003).
- G. Gutin & J. Bang-Jensen:** *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications.* (2000)
- C.D. Godsil & G.F. Royle:** *Algebraic Graph Theory.* (Springer 2001)
- T.R. Jensen & B. Toft:** *Graph Coloring Problems.* (Wiley 1995)
- Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba:** *A számítástudomány alapjai.* Typotex Kiadó, Budapest 2002.
- Lawler, Eugene L.:** *Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1982.

Lovász L.: *Combinatorial problems and exercises.* Akadémiai Kiadó Budapest és North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford 1979.

Lovász L.: *Kombinatorikai problémák és feladatok.* Typotex Kiadó, Budapest 1999.

Lovász L. és Gács P.: *Algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

L. Lovász & M.D. Plummer: *Matching Theory.* (North-Holland 1986)

Mayeda W.: *Alkalmazott Gráfelmélet.* Műszaki Könyvkiadó Budapest 1976.

Merria R.: *Graph Theory.* John Wiley & Sons, 2001

B. Mohar & C. Thomassen: *Graphs on Surfaces.* (Johns Hopkins 2001)

Motohashi Y.: *Sieve Methods and Prime Number Theory.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1983.

Ore, O.: *A gráfok és alkalmazásaik.* Gondolat, Budapest 1972.

Recski András: *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics.* (English), Budapest: Akadémiai Kiadó. xiii, 531 p. (1989).

Thulasiraman K. and Swamy M.N.S.: *Graphs: Theory and algorithms.* John Wiley & Sons, INC. New York, 1992

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/>

<http://www.math.klte.hu>

<http://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>,

<http://www.combinatorics.org/>

http://lovelace.thi.informatik.uni-frankfurt.de/~jukna/EC_Book/links.html

<http://www.utm.edu/departments/math/graph/>